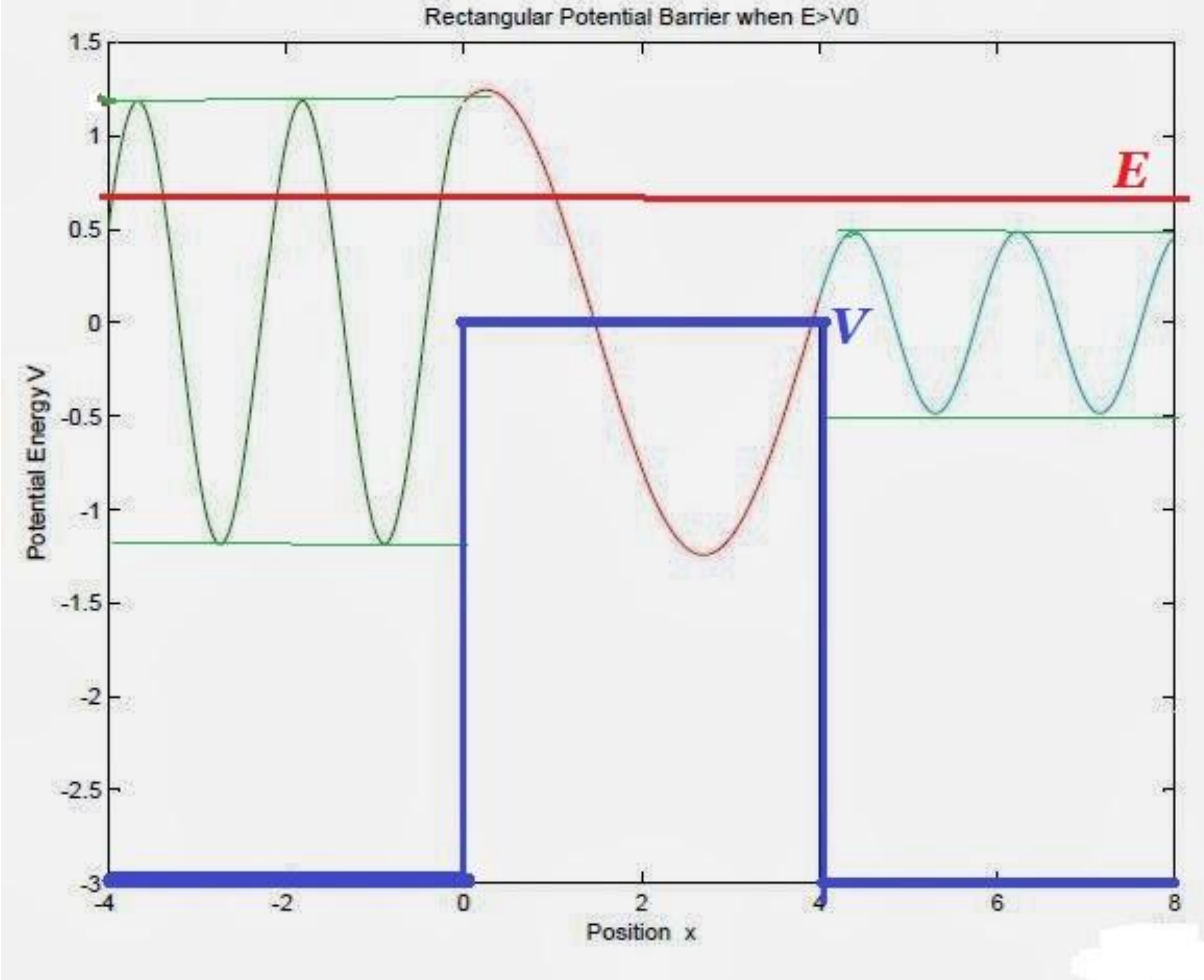

Rectangular Potential Barrier when E>V0
E
V
Potential Energy V
Position x
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-4
-2
0
2
4
6
8

5.3 位能障礙（共振散射、穿隧效應）

若有一能量為 E 的質點，自左向右運動，當它通過位能為 V_0 的障礙時，將視 E 與 V_0 的相對大小，而會有兩種情況發生：

(一) $E > V_0$（**共振**）:

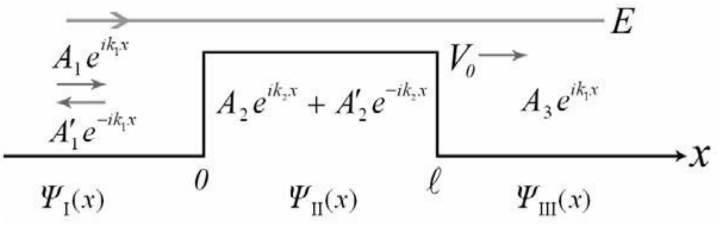

圖 5.11

在此情況下，三個區域的波函數，將均為震盪解形式，即

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{I}}(x) &= A_1\, e^{ik_1x} + A_1'\, e^{-ik_1x}\\ \Psi_{\mathrm{II}}(x) &= A_2\, e^{ik_2x} + A_2'\, e^{-ik_2x}\\ \Psi_{\mathrm{III}}(x) &= A_3\, e^{ik_1x}\end{aligned} \tag{5.37}$$

其中由式(5.6)

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\,, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \tag{5.38}$$

上式三個波函數內，共含有五個位知數（A_1、A_1'、A_2、A_2'與A_3），但因只有在 $x=0$ 與 ℓ 處，所對應之波函數，與波函數導數皆須連續，一共僅有四個邊界條件可茲使用，故無法準確解得各未知數，然而，仍可求得彼此之間的相對強度。

・在 $x=\ell$ 處

$$\Psi_{\mathrm{II}}(\ell) = A_2\, e^{ik_2\ell} + A_2'\, e^{-ik_2\ell} = \Psi_{\mathrm{III}}(\ell) = A_3\, e^{ik_1\ell} \tag{5.39}$$

$$\Psi_{\mathrm{II}}'(\ell) = ik_2A_2\, e^{ik_2\ell} - ik_2A_2'e^{-ik_2\ell} = \Psi_{\mathrm{III}}'(\ell) = ik_1A_3\, e^{ik_1\ell} \tag{5.40}$$

$$(5.39)\cdot ik_2 + (5.40) \qquad \Rightarrow A_2 = \frac{k_1+k_2}{2k_2}A_3\, e^{i(k_1-k_2)\ell} \tag{5.41}$$

$$(5.39)\cdot ik_2 - (5.40) \qquad \Rightarrow A_2' = \frac{k_2-k_1}{2k_2}A_3\, e^{i(k_1+k_2)\ell} \tag{5.42}$$

・在 $x=0$ 處

$$\Psi_{\mathrm{I}}(0)=A_1+A'_1=\Psi_{\mathrm{II}}(0)=A_2+A'_2 \tag{5.43}$$

$$\Psi'_{\mathrm{I}}(0)=ik_1A_1-ik_1A'_1=\Psi'_{\mathrm{II}}(0)=ik_2A_2-ik_2A'_2 \tag{5.44}$$

$$(5.43)\cdot ik_1+(5.44) \qquad \Rightarrow A_1=\frac{k_1+k_2}{2k_1}A_2+\frac{k_1-k_2}{2k_1}A'_2 \tag{5.45}$$

$$(5.43)\cdot ik_1-(5.44) \qquad \Rightarrow A'_1=\frac{k_1-k_2}{2k_1}A_2+\frac{k_1+k_2}{2k_1}A'_2 \tag{5.46}$$

所以，利用式(5.41) 與(5.42)，將可以 A_3 表 A_1 與 A'_1，因

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{e^{ik_1\ell}}{4k_1k_2}[(k_1+k_2)^2e^{-ik_2\ell}-(k_1-k_2)^2e^{ik_2\ell}]A_3\\&=e^{ik_1\ell}\left[\cos k_2\ell-i\frac{k_1{}^2+k_2{}^2}{2k_1k_2}\sin k_2\ell\right]A_3\end{aligned} \tag{5.47}$$

及
$$\begin{aligned}A'_1&=\frac{e^{ik_1\ell}}{4k_1k_2}[(k_1{}^2-k_2{}^2)e^{-ik_2\ell}+(k_2{}^2-k_1{}^2)e^{ik_2\ell}]A_3\\&=e^{ik_1\ell}\cdot\frac{i\,(k_2{}^2-k_1{}^2)}{2k_1k_2}\cdot\sin k_2\ell\cdot A_3\end{aligned} \tag{5.48}$$

則振幅 A'_1 與 A_1 之平方比，稱為**反射率**，且

$$R\equiv\left|\frac{A'_1}{A_1}\right|^2=\frac{(k_2{}^2-k_1{}^2)^2\sin^2k_2\ell}{4k_1{}^2k_2{}^2+(k_2{}^2-k_1{}^2)^2\sin^2k_2\ell} \tag{5.49}$$

則振幅 A_3 與 A_1 之平方比，稱為**穿透率**，且

$$T\equiv\left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2=\frac{4k_1{}^2k_2{}^2}{4k_1{}^2k_2{}^2+(k_1{}^2-k_2{}^2)^2\sin^2k_2\ell} \tag{5.50}$$

且 $R+T=1$ 。或以能量 E 與位能 V_0 表示成

$$\boxed{\begin{aligned}T&=4E(E-V_0)\Big/4E(E-V_0)+V_0{}^2\sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\ell\right)\\&=1\Big/1+\frac{1}{4}\frac{V_0^2}{E(E-V_0)}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\ell\right)\end{aligned}} \tag{5.51}$$

$$T = 4E(V_0 - E) \Big/ 4E(V_0 - E) + V_0{}^2 \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \ell \right)$$
$$= 1 \Bigg/ 1 + \frac{1}{4} \frac{V_0{}^2}{E(V_0 - E)} \sinh^2(\rho\ell) \qquad (5.56)$$

此式一般而言，$T \neq 0$ 也就是說，縱使總能量 E 低於位能 V_0 時，仍有可能穿越位能障礙，此謂之穿隧（*tunneling*）效應。

若 $\rho\ell >> 1$，

$$\sinh(\rho\ell) = \frac{1}{2}(e^{\rho\ell} - e^{-\rho\ell}) \sim \frac{1}{2} \cdot e^{\rho\ell} \qquad (5.57)$$

則，**穿透率**可簡化**為**

$$T \cong 4E(V_0 - E) \Big/ V_0{}^2 \cdot \frac{1}{4} e^{2\rho\ell} = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\rho\ell} \qquad (5.58)$$

附　　註

經由一維問題的探討，我們可以得知一些有關粒子具有波動性質的重要資訊，整理如下：

1. 當 $E > V(x)$，波函數呈現振盪的型式；當 $E < V(x)$，波函數則呈現指數衰減。
2. **當一粒子被局限在空間中的某區域，便會產生束縛態的波函數。粒子只能具有某些特定能量**，而這些能量值，是由位能井的深度來決定。
3. 量子波動在遇到位能屏障時，會發生反射和穿透；這行為與古典波動非常類似。
4. 質點可以穿透在古典物理中的禁區，而且出現在，原本沒有足夠能量越過之位能屏障的另一邊。