8.2 任意兩角動量的加法

有了兩角動量為 1/2 所形成總角動量的固有值，及固有狀態的經驗後，現可推廣探討：任意二角動量相加後，所形成角動量的量子數值與量子狀態。欲討論二粒子的組合系統，以足標 1、2 代表二不同粒子。第一粒子所對應的角動量狀態空間 E_1，其**標準基底**可以 $\{|k_1, j_1, m_1\rangle\}$（其中 k_1 代表角動量 $\hat{J}_1^2$、$\hat{J}_{1z}$ 量子數以外的所有固有值），或簡寫**為** $\{|j_1, m_1\rangle\}$，因此

$$\hat{J}_1^2 | j_1, m_1\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 | j_1, m_1\rangle \tag{8.37}$$

$$\hat{J}_{1z} | j_1, m_1\rangle = m_1\hbar | j_1, m_1\rangle \tag{8.38}$$

$$\hat{J}_{1\pm} | j_1, m_1\rangle = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1\pm 1)}\ \hbar | j_1, m_1\pm 1\rangle \tag{8.39}$$

類似的關係式同樣適用於第二粒子的角動量狀態空間 E_2。

定義：向量空間 $\mathbb{C} = A\otimes B$ 稱為空間 A 與 B 的**張量積**（*tensor product*），若對於 $\mathbb{C}$ 中所有的向量 $|c\rangle$，皆可在空間 A 中找到一向量 $|a\rangle$，在空間 B 中找到一向量 $|b\rangle$，使得 $|c\rangle = |a\rangle\otimes|b\rangle$；亦可稱狀態 $|c\rangle$ 為 $|a\rangle$ 與 $|b\rangle$ 的張量積。

附　　註

若 $\{|u_{i(1)}\rangle\}$ 及 $\{|v_{j(2)}\rangle\}$ 分別為兩向量空間 E_1、E_2 之基底，則 $|u_{i(1)}\rangle\otimes|v_{j(2)}\rangle$ 亦會是張量積空間 $E_1\otimes E_2 = E$ 之一組基底。若 n_1 和 n_2 分別為 E_1 和 E_2 的維度，則 E 之維度為 $n_1 n_2$。

定義：設 V 為一向量空間，U_1、U_2、⋯、U_n 為其子空間，若 V 中的每一向量 v 都可以唯一的方式寫成 $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，其中 u_i 為 U_i 中之元素，則 V 稱為 U_1、U_2、⋯、U_n 之**直和**（*direct sum*），並記為 $V = U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_n$。

對二組互相獨立的角動量運算子 $\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}$ 與 $\hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}$，由式(6.16)與(6.17)已知它們在其自身的體系中，各自可為一 *C.S.C.O.*，可將 $\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}$ 與 $\hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}$ 之固有態 $|j_1, m_1\rangle$ 與 $|j_2, m_2\rangle$ 為基底所組成的空間，分別設為 E_1 與 E_2，因這二組運算子分別作用在自身的空間上，而與另一空間無關，即 E_1 與 E_2 空間上之運算子彼此可交換，故 $\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}\}$ **可形成一組 *C.S.C.O.***。

而此四個運算子所作用的空間，則擴大為 $E = E_1 \otimes E_2$，其**基底則為此四運算子的固有態所組成**，即 $|\, j_1 , j_2 ; m_1 , m_2 \rangle$ 或 $|\, j_1 , m_1 \rangle \otimes |\, j_2 , m_2 \rangle$。此**四運算子所對應的固有值則為** $j_1 (j_1 + 1) \hbar^2$, $j_2 (j_2 + 1) \hbar^2$, $m_1 \hbar$ 與 $m_2 \hbar$。

現考慮二角動量運算子 $\hat{J}_1$ 與 $\hat{J}_2$ 之合成或相加，即

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2 \tag{8.40}$$

或其對應分量

$$\hat{J}_x = \hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x}、\hat{J}_y = \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}、\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z} \tag{8.41}$$

則 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 有

$$\begin{aligned}[\hat{J}_x , \hat{J}_y] &= [\hat{J}_{1x} + \hat{J}_{2x} , \hat{J}_{1y} + \hat{J}_{2y}] = [\hat{J}_{1x} , \hat{J}_{1y}] + [\hat{J}_{2x} , \hat{J}_{2y}] \\ &= i\hbar (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}) = i\hbar \hat{J}_z \end{aligned} \tag{8.42}$$

同理，$[\hat{J}_i , \hat{J}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$。故 $\hat{\boldsymbol{J}}$ 滿足角動量之定義，稱其為 $\hat{\boldsymbol{J}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{J}}_2$ 之總角動量或角動量之和。由式(6.16)與(6.17)，總角動量必可以 $\hat{J}^2$ 與 $\hat{J}_z$ 成雙出現，彼此可交換，且其量子數值同為整數或半整數。即

$$\hat{J}^2 |\, J, M \rangle = J(J+1)\hbar^2 |\, J, M \rangle \quad , \quad \hat{J}_z |\, J, M \rangle = M\hbar |\, J, M \rangle \tag{8.43}$$

因

$$\hat{J}^2 = \hat{J} \cdot \hat{J} = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \cdot (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2 \tag{8.44}$$

故

$$\begin{aligned}[\hat{J}^2 , \hat{J}_1^2] &= [\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\, \hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2 , \hat{J}_1^2] \\ &= 2 [\hat{J}_{1x} \hat{J}_{2x} + \hat{J}_{1y} \hat{J}_{2y} + \hat{J}_{1z} \hat{J}_{2z} , \hat{J}_1^2] = 0 \end{aligned} \tag{8.45}$$

同理，$[\hat{J}^2 , \hat{J}_2^2] = 0$。又

$$[\hat{J}_1^2 , \hat{J}_z] = [\hat{J}_1^2 , \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}] = 0 \tag{8.46}$$

同理，$[\hat{J}_2^2 , \hat{J}_z] = 0$。但

$$\begin{aligned}[\hat{J}^2 , \hat{J}_{1z}] &= [\hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + 2\, \hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2 , \hat{J}_{1z}] \\ &= 2 [\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2 , \hat{J}_{1z}] = 2 [\hat{J}_{1x} \hat{J}_{2x} + \hat{J}_{1y} \hat{J}_{2y} + \hat{J}_{1z} \hat{J}_{2z} , \hat{J}_{1z}] \\ &= 2 \{ [\hat{J}_{1x} , \hat{J}_{1z}] \hat{J}_{2x} + [\hat{J}_{1y} , \hat{J}_{1z}] \hat{J}_{2y} \} = 2i\hbar (- \hat{J}_{1y} \hat{J}_{2x} + \hat{J}_{1x} \hat{J}_{2y}) \neq 0 \end{aligned}$$

同樣地，$[\hat{J}^2, \hat{J}_{2z}] = 2i\hbar(-\hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y} + \hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x}) \neq 0$。然而，再次

$$\begin{aligned}[\hat{J}^2, \hat{J}_z] &= [\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}] + [\hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}] \\ &= 2i\hbar(-\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x} + \hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y} - \hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y} + \hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x}) = 0 \end{aligned} \tag{8.47}$$

上述呈現了 $\hat{J}_1^2$, $\hat{J}_2^2$, $\hat{J}^2$ 與 $\hat{J}_z$ 運算子之間五個可交換關係，此外 $[\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2] = 0$，所以有且僅有 $\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\}$ **可形成另一組**不同於 $\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}\}$ 之 ***C.S.C.O***。這四個運算子可共享有相同的固有狀態，此固有狀態的集合便可構成空間 $E = E_1 \otimes E_2$ 之新基底。而這個新基底也就被選取用來探討，總角動量 $\hat{J}^2$ 及其投影運算子 $\hat{J}_z$。特別是它們的固有值與固有狀態。亦即，我們欲瞭解

- $\hat{J}^2$ 對應之固有值 J 與 j_1、j_2 有何關係？
- $\hat{J}_z$ 對應之固有值 M 與 m_1、m_2 各有何關係？
- $\hat{J}_1^2$、$\hat{J}_2^2$、$\hat{J}^2$、$\hat{J}_z$ 的固有狀態與 $\hat{J}_1^2$、$\hat{J}_2^2$、$\hat{J}_{1z}$、$\hat{J}_{2z}$ 之固有狀態 $|j_1 j_2, m_1 m_2\rangle$ 有何關係？

(一) 若 $\hat{J}^2$ 之固有值為 $J(J+1)\ \hbar^2$，給定 j_1 與 j_2，則 J 值為何？

因 $\hat{J}_z = \hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z}$，則

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_{1z}] = [\hat{J}_z, \hat{J}_{2z}] = [\hat{J}_{1z}, \hat{J}_{2z}] = 0 \tag{8.48}$$

故此三運算子共享有相同的固有狀態，茲以 $|m_1, m_2, M\rangle$ 表示。則

$$\hat{J}_z|m_1, m_2, M\rangle = (\hat{J}_{1z} + \hat{J}_{2z})|m_1, m_2, M\rangle \tag{8.49}$$

$$M\hbar|m_1, m_2, M\rangle = (m_1 + m_2)\hbar|m_1, m_2, M\rangle \tag{8.50}$$

所以，$M = m_1 + m_2$ 恆成立，而 M 可能擁有之最大值，則來自於 m_1, m_2 之最大值，即

$$M_{\max} = (m_{1_{\max}} + m_{2_{\max}}) = j_1 + j_2 \tag{8.51}$$

因

$$-j_1 \le m_1 \le j_1\ ,\ -j_2 \le m_2 \le j_2 \tag{8.52}$$

而 $M_{\max}$ 亦為總角動量 $\hat{J}^2$ 固有值 $J(J+1)\hbar^2$ 中之 J 的最大值，故

$$J_{\max} = M_{\max} = j_1 + j_2 \tag{8.53}$$

(二) 如何以基底 $\{|j_1 j_2, m_1 m_2\rangle\}$ 來表示 $\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 的固有狀態？

因為 $\hat{J}_1^2$、$\hat{J}_2^2$、$\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$ 彼此都可交換，故享有共同的固有狀態，因此可以其對應之固有值來（或量子數）來標示，即可以 $|j_1 j_2, J M\rangle$ 來表示。且

$$\hat{J}_1^2 |j_1 j_2, J M\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1 j_2, J M\rangle \tag{8.57}$$

$$\hat{J}_2^2 |j_1 j_2, J M\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_1 j_2, J M\rangle \tag{8.58}$$

$$\hat{J}^2 |j_1 j_2, J M\rangle = J(J+1)\hbar^2 |j_1 j_2, J M\rangle \tag{8.59}$$

$$\hat{J}_z |j_1 j_2, J M\rangle = M\hbar |j_1 j_2, J M\rangle \tag{8.60}$$

我們先以二電子自旋角動量的合成為例，做完整的探討，尋找各別的角動量與合成的總角動量之間的關係，然後再用類比方式，推廣至任意二角動量的合成相加。

(1) 兩角動量均為 $\frac{1}{2}$ 的情形：

兩粒子自旋均為 $\frac{1}{2}$ 及其對應投影值的狀態

$$|j_1 j_2, m_1 m_2\rangle = |s_1 s_2, m_1 m_2\rangle = |m_1 m_2\rangle \tag{8.61}$$

可有四種情形（為方便計， $s_1 = s_2 = 1/2$ 可省略不寫），即

$$|\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = |++\rangle,\ |\tfrac{1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle = |+-\rangle,\ |\tfrac{-1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle = |-+\rangle,\ |\tfrac{-1}{2}\tfrac{-1}{2}\rangle = |--\rangle \tag{8.62}$$

我們將討論，如何用此四狀態，來表示總角動量狀態

$$|j_1 j_2, J M\rangle = |s_1 s_2, S M\rangle = |S M\rangle \tag{8.63}$$

因 $\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}$ 且 $[\hat{S}, \hat{S}_{1z}] = [\hat{S}, \hat{S}_{2z}] = [S_{1z}, S_{2z}] = 0$ (8.64)

故 $\hat{S}_{1z}, \hat{S}_{2z}, \hat{S}$ 共享有相同的固有狀態，並可設為 $|m_1 m_2 M\rangle$，且有

$$\hat{S}_z |m_1, m_2, M\rangle = (\hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z})|m_1, m_2, M\rangle \tag{8.65}$$

$$M\hbar |m_1, m_2, M\rangle = (m_1 + m_2)\hbar |m_1, m_2, M\rangle \tag{8.66}$$

表：任意二角動量所形成之總角動量及其對應之固有狀態

第一	第二	系統	總角動量	C.S.C.O.	固有狀態
s_1	s_2	二粒子之自旋	$\hat{S}_1+\hat{S}_2=\hat{S}$	$\{\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2, \hat{S}, \hat{S}_z\}$	$s_1, s_2; S, M_S\rangle$
ℓ_1	ℓ_2	二粒子之軌道角動量	$\hat{L}_1+\hat{L}_2=\hat{L}$	$\{\hat{L}_1^2, \hat{L}_2^2, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$	$\lvert \ell_1, \ell_2; L, M_L\rangle$
L	S	同粒子之軌道與自旋	$\hat{L}_1+\hat{S}=\hat{J}$	$\{\hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\}$	$\lvert \ell, s; J, M_S\rangle$
j_1	j_2	二粒子之各別總角動量	$\hat{J}_1+\hat{J}_2=\hat{J}$	$\{\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\}$	$\lvert j_1, j_2; J, M_J\rangle$