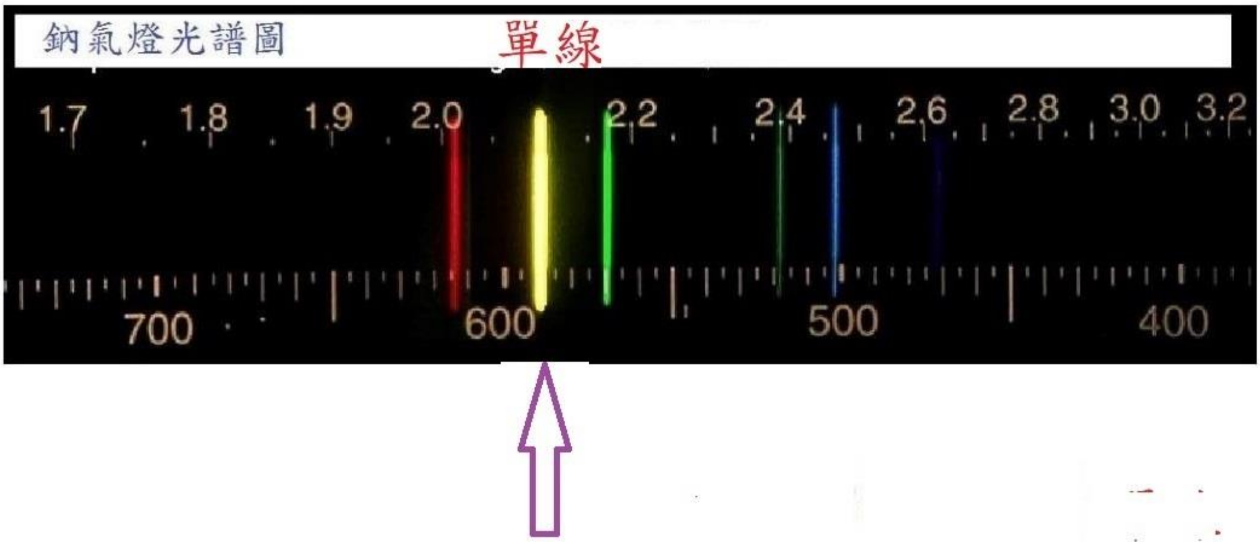
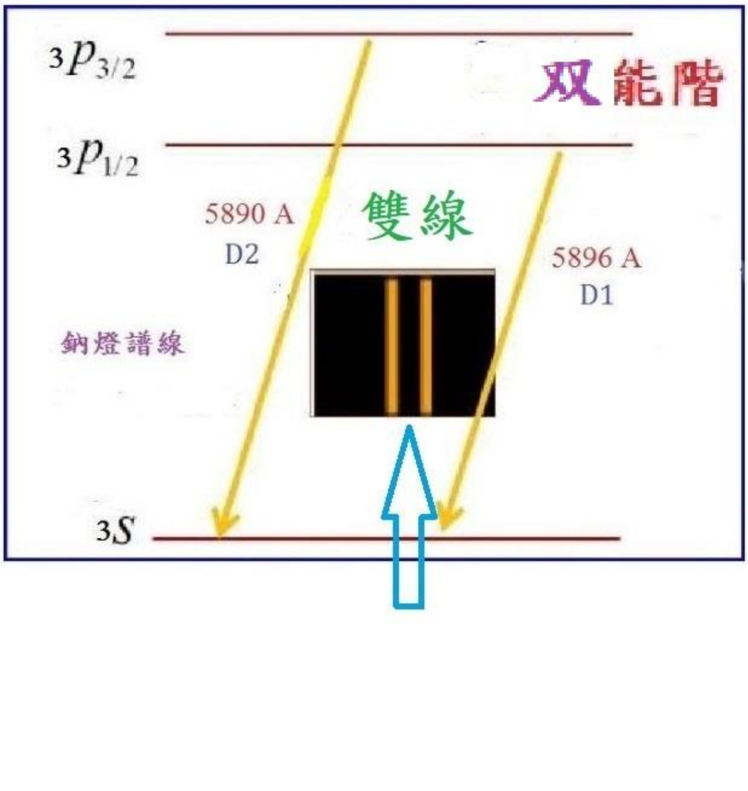
鈉原子光譜線現象

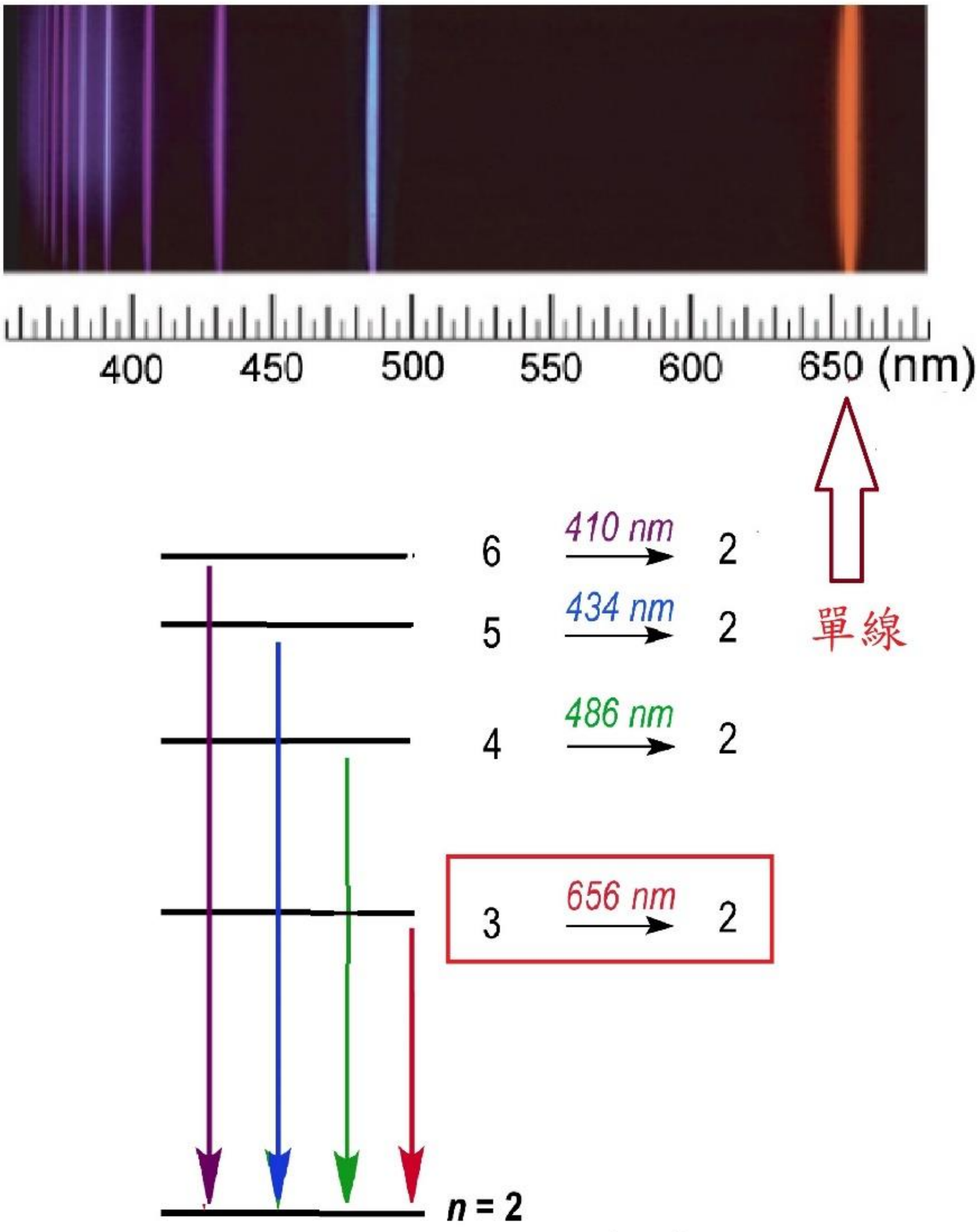
5-9-2017



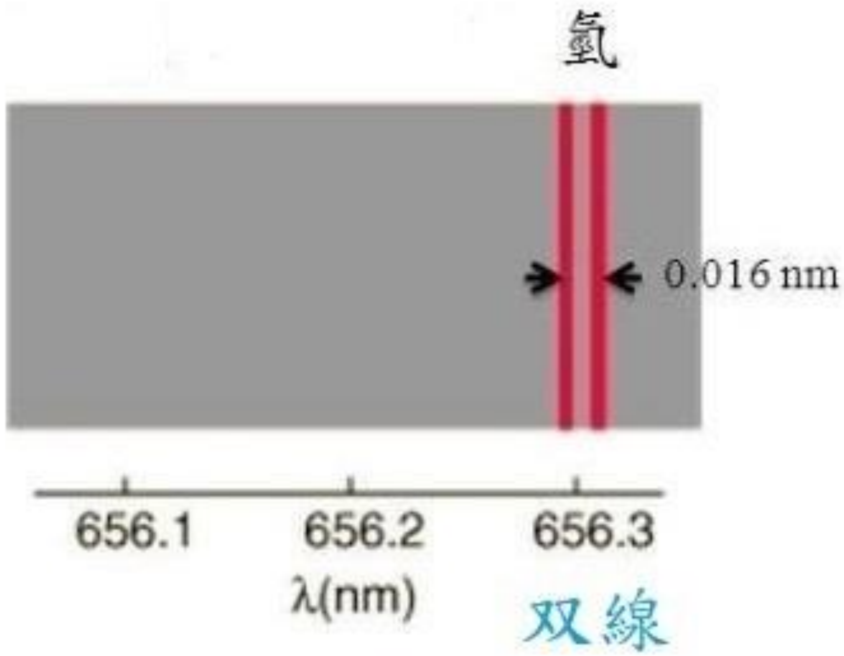
鈉原子之精細結構

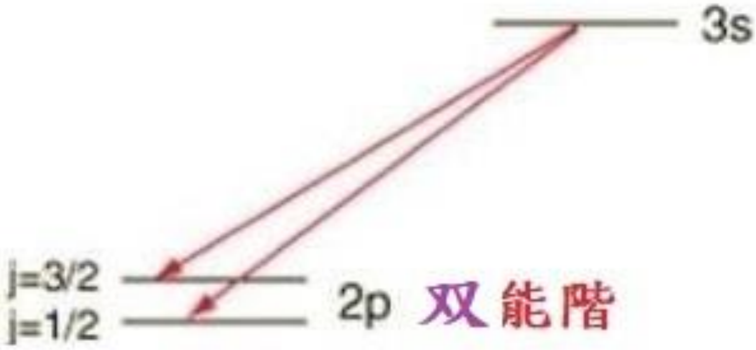


氫原子光譜圖


400
450
500
550
600
650 (nm)
單線
6
410 nm
2
5
434 nm
2
4
486 nm
2
3
656 nm
2
n = 2

氫原子之精細結構





精細結構 (Fine Structure)

106-5-9 yao

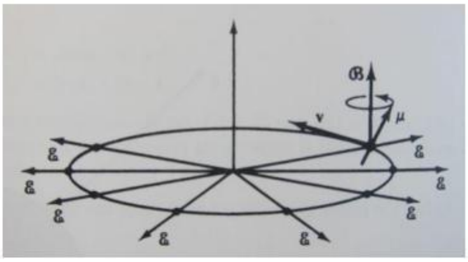
(一) 自旋-軌道作用(L-S耦合)

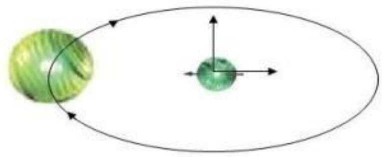
原子核環繞電子所生的磁場 $\boldsymbol{B}$，與電子自旋 $\boldsymbol{S}$ 所生的磁偶極矩 $\boldsymbol{\mu}_S$，交互作用位能為

$$V' = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \boldsymbol{B}$$

由 Biot-Savart 定律中心磁場位能為

$$B = \mu_0 I/2r$$





靜止於電子的慣性坐標

其中電流$I=q/T$=質子電量/週期，結合質子-電子相對軌道角動量

$$l = rmv = rm\left(\frac{2\pi r}{T}\right) = 2\pi m v^2/T.$$

可得

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 q/2rT = \mu_0 q/(4\pi m r^3)\ \boldsymbol{l} = (q/4\pi\epsilon_0)(1/mc^2r^3)\ \boldsymbol{l}$$

電子自旋所生之磁矩為

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{|q|}{m}\boldsymbol{S}$$

合併可得交互位能為

$$V' = (q^2/4\pi\epsilon_0)(1/m^2c^2r^3)\ \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{l} = (e^2/m^2c^2r^3)\ \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{S}$$

此處$e^2 = q^2/4\pi\epsilon_0$。然而電子在加速運動，需加上1/2的修正值，而得

$$V' = \left(\frac{e^2}{2m^2c^2r^3}\right)\ \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{S}$$

對應之自旋-軌道交互作用的運算子便為

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{H}}'_{LS} = \left(\frac{e^2}{2m^2c^2r^3}\right)\ \hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}}$$

對$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ 而言，其合理之固有態為 $|l,s;J,M\rangle$。由

$$\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{J}}^{2}-\hat{\boldsymbol{L}}^{2}-\hat{\boldsymbol{S}}^{2}\right)=\frac{h^{2}}{2}[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}]$$

對相同能階 n，

$$\langle nl'j'm'|\hat{\boldsymbol{H}}'_{LS}|nljm\rangle=\delta_{l'l}\delta_{j'j}\delta_{m'm}(\frac{e^{2}h^{2}}{2m^{2}c^{2}})\frac{1}{2}[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}]\langle nl'j'm'|\frac{1}{r^{3}}|nljm\rangle$$

因此在$\hat{\boldsymbol{H}}'_{LS}$ 微擾下，對含退化度之能量修正，其**世俗方程式中非對角線元素均為0，其固有值之解恰為對角線上元素的值**。即一級能量修正值為

$$E'_{LS}=\langle nljm|\hat{\boldsymbol{H}}'_{LS}|nljm\rangle=(\frac{e^{2}h^{2}}{2m^{2}c^{2}})\frac{1}{2}[j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}]\langle\frac{1}{r^{3}}\rangle_{nl}$$

$$E'_{LS}=\left(\frac{e^{2}}{2a}\frac{1}{n^{2}}\right)\frac{1}{n}\left(\frac{h^{2}}{m^{2}c^{2}a^{2}}\right)\frac{1}{2}\left[\frac{j(j+1)-l(l+1)-3/4}{l(l+1/2)(l+1)}\right]$$

$$E'_{LS}=\frac{|E_{n}|}{n}\alpha^{2}\left[\frac{j(j+1)-l(l+1)-3/4}{l(2l+1)(l+1)}\right]$$

其中

$$\alpha=\frac{h}{mca}=\frac{h}{mc}\frac{me^{2}}{h^{2}}=\frac{e^{2}}{hc}=\frac{1}{137}$$

是在處理精細結構中首次出現，故稱為**精細結構常數**(fine structure constant)。它將電磁學e，相對論c與量子物理$\hbar$中三個重要常數皆放在一起，也是以後強與弱交互作用的重要參考量。又

$$E_{n}=\frac{-E_{0}}{n^{2}}=-\frac{me^{4}}{2h^{2}}\frac{1}{n^{2}}=-\frac{mc^{2}}{2}\frac{e^{4}}{h^{2}c^{2}}\frac{1}{n^{2}}=-\frac{1}{2}mc^{2}\frac{\alpha^{2}}{n^{2}}$$

代表氫原子能階E_{n}為其靜止質量$0.51MeV$的$\alpha^{2}\sim10^{-4}$倍，而E'_{LS}又為E_{n}之$\alpha^{2}\sim10^{-4}$倍。即

$$mc^{2}:E_{n}:E'_{LS}=1:\alpha^{2}:\alpha^{4}$$